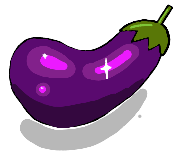


Ćwiczenia & algebry

- hodnotenie
 - 60 otázok
 - 40 otázok
 - domáce úlohy (po 2 body)
 - 6 najlepších bodí hodnotených (bod ich plus-minus 12)
 - 2 písomky - každá 44 bodov
 - tesne pred pitau skúškou a niekoľko týždňov pred koncom
- + 5 bodov Fórum (bonusové príklady)



FUNKCIA (=ZOBRAZENIE)

$f: A \rightarrow B$ (z A do B)
'argumenty'

$\neq$ A - definičný obor
B - obraz hodnot

karteziansky súčin

$$A \times B = \{ (a, b) ; a \in A ; b \in B \}$$

karteziansky súčin

Def.: Funkcia $f: A \rightarrow B$ je podmnožina súčinu $A \times B$ taká, že platia dve vlastnosti ($f \subseteq A \times B$):

- $(\forall a \in A) (\exists b \in B) (a, b) \in f \Leftrightarrow f(a) = b$
- $(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \Rightarrow b = c$
- $f(a) = b \wedge f(a) = c \Rightarrow b = c$

$\bullet f: \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle \neq g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sin(x) \quad g(x) = 3 \ln(x)$

$\bullet f(x) = 2x \quad f = \{ (x, 2x) ; x \in \mathbb{R} \}$
 $g(x) = x \ln x \quad g = \{ (x, \ln x) ; x \in \mathbb{R} \}$

pr. $A = \{1, 2, 3\}; B = \{a, b\}$

$f = \{ (1, a), (2, b), (3, a) \} \Leftrightarrow f(1) = a; f(2) = b; f(3) = a$

ROVNOSŤ FUNKCIÍ (=ZOBRAZENÍ)

Def.: Nech $f: A \rightarrow B; g: C \rightarrow D$. Potom $f = g \Leftrightarrow$

- $A = C$
- $B = D$
- $(\forall a \in A) f(a) = g(a)$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g(x) = 1$

$f = g \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

SKLADANIE FUNKCIÍ (kompozícia)

Def.: Nech $f: A \rightarrow B; g: B \rightarrow C$. Zložením f a g sa nazýva funkcia $g \circ f: A \rightarrow C$ taká, že pre $(x \in A) \quad g \circ f(x) = g(f(x))$.

- zloženie: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 toto musí byť rovnaké

$\textcircled{A} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$
 $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $f \circ g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$\textcircled{B} f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g \circ f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \circ g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$\textcircled{C} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x \quad g \circ f(x) = g(2x) = \sin(2x)$
 $g(x) = \sin(x) \quad \sin(f(x)) = \sin(2x)$

$f \circ g(x) = f(\sin(x)) = 2 \sin x$
 $2 \cdot g(x) = 2 \sin x$

$f \circ g \neq g \circ f$
 nie je to komutatívne

- identita na množine A : $\text{id}_A: A \rightarrow A$
 $(\forall a \in A) \text{id}_A(a) = a$

$B^A = \{ f: A \rightarrow B \text{ funkcia} \}$ $\rightarrow$ množina $\forall$ funkcií z A do B
 $A^A = \{ f: A \rightarrow A \text{ funkcia} \}$
 $f, g \in A^A; f \circ g: A \rightarrow A (\in A^A)$

$\{ a, b \} \xrightarrow{\text{funkcia}} \{ (f(a), f(b)), (f(b), f(a)) \}$

tučnejšie sa to
nie komutatívne
preto

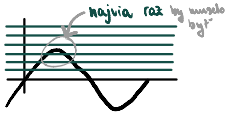
$f: A \rightarrow B$
 $f \circ \text{id}_A = f$
 $\text{id}_B \circ f = f$

INJEKTIVNA (PROSTA) FUNKCIA

Def.: $f: A \rightarrow B$ je prosta, ak pre $a, b \in A$,

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$a = b \Leftarrow f(a) = f(b)$$



Veta: Nech $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ sú injektívne funkcie.

Potom $g \circ f: A \rightarrow C$ je injektívna funkcia.

$$D: a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$x \neq y \Rightarrow g(x) \neq g(y)$$

$$\Rightarrow g(f(a)) \neq g(f(b)) \Rightarrow g \circ f(a) \neq g \circ f(b)$$

□

SURJEKTIVNA FUNKCIA ('funkcia na')

Def.: $f: A \rightarrow B$ je SURJEKTIVNA, ak pre $(\forall b \in B) (\exists a \in A) f(a) = b$.

$$H(f) = B$$

$$H(f) = \{ b \in B : (\exists a \in A) f(a) = b \} = \{ f(a) : a \in A \}$$



$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x \rightarrow \text{surjektívna a injektívna}$$

$$g(x) = \sin(x) \rightarrow \text{ani jedno, ani druhé}$$

Analogická veta: Zložením dvoch surjektívnych funkcií je surjektívna.

29.9.2021

injektivne, surjektivne funkcije (zobrazovanie)

Funkcia (zobrazovanie) $f: A \rightarrow B$ sa naziva bijekcia ak je injektivna a (aj) surjektivna.

$a + b \mapsto f(a) + f(b)$
nie je potreba
gledat na prvotny
stav

$(v \neq 0) (\exists a \in A) f(a) = v$
odpoveda na prvotny
stav (a) (1)

injektivita



surjektivita



bijekcia



Ak existuje bijekcia medzi množinami,
tak majú množiny rovnako veľa
prvkov

- Zlozenie 2 injekt. zobrazov. je injekt. zobrazovanie

- (1- sur. - (1- sur. - (1-

- (1- bijekt. - (1- bijekt. - (1-

Nech A je neprázdna množina.

TR: 1. Nech A má vlastnosť: každé injektivné zobrazovanie

$f: A \rightarrow A$ je surjektivné.

Potom A má vlastnosť: každé surjektivné zobrazovanie

$f: A \rightarrow A$ je injektivné.

TR: 2. Nech A má vlastnosť: každé injekt. zobr.

$f: A \rightarrow A$ je injekt.

Potom A má vlastnosť: každé injekt. zobr.

$f: A \rightarrow A$ je surjektiv.

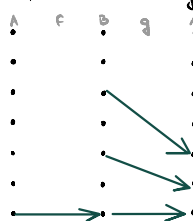
Def:

Nech $f: A \rightarrow B$ je funkcia.

Hovoríme, že $g: B \rightarrow A$ je ľavá inverzia zobrazov. ku f , ak $g \circ f = id_A$.

Hovoríme, že $g: B \rightarrow A$ je pravá inverzia zobrazov. ku f , ak $f \circ g = id_B$.

(Pr) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = 2x$ $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$



$g \circ f(x) = g(f(x))$

$g \circ f(0) = 0$

$g \circ f(1) = 1$

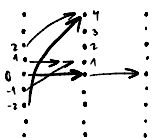
$g(f(1)) = 1$

$g(2) = 1$

$g(f(2)) = 2$

$g(4) = 2$

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = x^2$



$g(f(0)) = 0$

$g(0) = 0$

$g(f(1)) = 1$

$g(1) = 1$

$g(f(-1)) = 1$

$g(1) = 1$

← TOTO

JE

MOŽA

D.Ú.

(IBAŽE PRE

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N})$

$g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{ak } x \in 2\mathbb{N} \\ x & \text{ak } x \in \mathbb{N} \end{cases}$

13 ak $x=1$

20 ak $x=3$

9 ak $x=5$

17 inak

Som

matematika

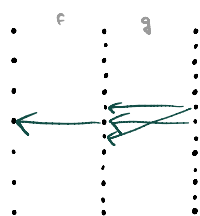
TR: Ak f nie je injektivna $\Rightarrow$ ľavá inv. zobrazovanie neexistuje.

Ku f existuje ľavá inv. zobrazovanie $\Leftrightarrow f$ je injektivna.

Ak f nie je surjektivna $\Rightarrow$ pravá inverzia zobrazov. neexistuje.

Ku $f \exists$ pravá inv. zobrazovanie $\Leftrightarrow f$ je surjektivna

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}; f(x) = 2x$



$f \circ g(0) = 0$

$f(g(0)) = 0 = 1 \cdot g(0) = 0$

$f \circ g(1) = 1 = 1 \cdot g(1) = 1$

$f \circ g(2) = 2 \neq 1 \cdot g(2) = 2$

$f(g(2)) = 2$

$f(g(b)) = b$

$g(b) \in \mathbb{A} \text{ a } f(a) = b$

$g(b) = b$

Def: Hovoríme, že g je (dobrotrúbná) inverzia zobrazov. ku f ak $g \circ f = id_A$ a $f \circ g = id_B$.

BIEKCIA

g je ľavá inv. zobr.

ku f - teda

f je pravá inv. zobr.

ku g - teda

Funkcia f je bijektivna $\Leftrightarrow$ ku $f \exists$ dobrotrúbná inv. zobrazovanie.

2. Def: Nech pre $f: A \rightarrow B \exists f_L, f_P: B \rightarrow A$ také, že $f_L \circ f = id_A$, $f \circ f_P = id_B$.

Potom $f_L = f_P$.

$(\forall b \in B) f_L(b) = f_P(b)$

D: $f_L(b) = f_L \circ id_B(b) = f_L \circ (f \circ f_P)(b) = f_L(f(f_P(b))) = (f_L \circ f)(f_P(b)) = id_A(f_P(b)) = f_P(b)$

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \quad g: A \rightarrow B, f: B \rightarrow C \quad \text{neco o bijekciach}$$

Def: permutácie množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ je bijekcia $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

↳ množina permutácií $\{1, 2, \dots, n\}$ sa označuje S_n

↳ zápis $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\varphi(1) = 3$$

$$\varphi(2) = 1$$

$$\varphi(3) = 4$$

$$\varphi(4) = 2$$

koľko prvkov má množina S_n ?

$$\# S_2 = 2 = 2!$$

$$\# S_3 = 6 = 3!$$

$$\# S_4 = 24 = 4!$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

↳ výmena riadkov $\rightarrow$ zoradenie

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

kompozícia: $\varphi \circ \psi$ (bijekcia)

$$= \varphi(\psi(1)) = 3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

prečo to prechádzame
od poslednej

IDENTITENTNÉ FUNKCIE: $f \circ f = f$ $f \circ \text{id}$

pre $f: A \rightarrow A$

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

$$f(1) = ?$$

$$f(2) = ?$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



$$f \circ f = \text{id}$$

ak existuje taká

f^{-1} , tak tento

výpočet je ok

(práve keď je to

invertovateľ)

$$f \circ g = f \circ \text{id}$$

$$f \circ (f \circ g) = f \circ (f \circ \text{id})$$

$$(f \circ f) \circ g = (f \circ f) \circ \text{id}$$

$$\text{id} \circ g = \text{id} \circ \text{id}$$

$$g = \text{id}$$

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

($\Leftrightarrow f$ je injektívna)

$$f \circ g = f \circ h$$

$$f \circ (f \circ g) = f \circ (f \circ h)$$

$$(f \circ f) \circ g = (f \circ f) \circ h$$

$$\text{id} \circ g = \text{id} \circ h$$

$$g = h$$

($g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$) $\Leftrightarrow f$ je surjektívna.

GRUPY

1. $(G, \cdot)$ $G \neq \emptyset$, $\cdot$ je BO na G

2. $\cdot$ je asoc.

3. $(\exists e \in G) (\forall a \in G) a \cdot e = a = e \cdot a$

4. $(\forall a \in G) (\exists a^{-1} \in G) a \cdot a^{-1} = e = a^{-1} \cdot a$

1. Zistite, či grupa (podľa vlastností úloh)

a) $(\mathbb{Z}, +)$

$$e = 1$$

$$a = 0 - 24e$$

dobrá $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_3$

ale inak

c) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

je BO?

$$a + 0 + b \Rightarrow ab \neq 0 \checkmark$$

$$e = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad (\text{ak } a \neq 0 \text{ a potom aj } \frac{1}{a} + 0)$$

b) $(\mathbb{R}_i, \cdot)$

$$e = 1$$

$$a = 0 - 24e$$

d) $(\mathbb{C}, +) \neq \mathbb{C} = \{a+bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$

$$e = 0 + 0i$$

$$a^{-1} = (-a) + (-b)i$$

g) $(\mathbb{R}^2, +), (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

$$e = (0, 0)$$

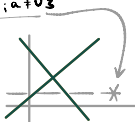
$$a = (-a, -b)$$

h) nov tabuľka

2. $G = \{f_{a,b} : f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f_{a,b}(x) = ax + b; a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0\}$

$$\text{pr. } f_{1,2}(x) = 2x - 2$$

$$f_{2,3}(x) = 2,78x + 3,14$$



$(G, \circ)$

$$f_{a,b} \circ f_{c,d}(x) = f_{a,b}(f_{c,d}(x)) = f_{a,b}(cx + d) = a(cx + d) + b = (ac)x + (ad + b) = f_{(ac), (ad+b)}$$

$$f_{c,d} \circ f_{a,b}(x) = f_{c,d}(f_{a,b}(x)) = f_{c,d}(ax + b) = c(ax + b) + d = (ca)x + (cb + d) = f_{(ca), (cb+d)}$$

nie je komutatívne

$$id_{\mathbb{R}} = f_{1,0}$$

$$f_{a,b} \circ f_{1,0} = f_{1,0} = f_{(a \cdot 1), (a \cdot 0 + b)}$$

$$ac = 1$$

$$ad + b = 0$$

$$c = \frac{1}{a}$$

$$d = -\frac{b}{a}$$

$$f_{a,b}^{-1} = f_{\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}} \rightarrow \text{práva inverzia}$$

(keď je zobrazenie bijekcia, tak pravá = ľavá inverzia)

hľadáme $2a$
nevyjde, že
tam má byť a

Nech $(G, \circ)$ je grupa, že $(\forall x \in G) x \circ x = e$.

Dokážte, že $(G, \circ)$ je kom. grupa. $(\forall a, b \in G) a \circ b = b \circ a$

Pr. v grupe určite platí $e \circ e = e$

Pr. každý je inverzný sám k sebe $\Rightarrow a \circ b \circ (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1} = b \circ a$



$$x = a \circ b$$

$$(a \circ b) \circ (a \circ b) = e \circ e = (a \circ a) \circ (b \circ b)$$

$$a \circ (b \circ (a \circ b))$$

$$a \circ (a \circ (b \circ b))$$

kto pole?

$$F = \{a+bi; a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$$

$$(F_1, +)$$

nice je pole



$$F = \{a+b\sqrt{5}; a, b \in \mathbb{Q}, \sqrt{5} \in \mathbb{R}\}$$

$$(a+b\sqrt{5}) + (c+d\sqrt{5}) = (a+c) + (b+d)\sqrt{5}$$

$$\in \mathbb{Q} \quad \in \mathbb{Q}$$

$$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) = (ac+5bd) + (ad+bc)\sqrt{5}$$

$$NP: 0 + 0\sqrt{5}$$

$$IP: (-a) + (-b)\sqrt{5}$$

je to asociativne, ako
+ aj $\cdot$ v $\mathbb{R}$ su asoci.

$$(a+b\sqrt{5}) \Rightarrow (a, b)$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$F = \{a, b\}; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac+bd, ad+bc)$$

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2-5b^2}, \frac{-b}{a^2-5b^2} \right)$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}} = \frac{a}{a^2-5b^2} + \left(\frac{-b}{a^2-5b^2} \right)\sqrt{5}$$

$$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5}) =$$

$$= (ac+ad\sqrt{5}+cb\sqrt{5}+5bd) =$$

$$= \underbrace{ac+5bd}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(ad+bc)}_{\in \mathbb{Q}}\sqrt{5}$$

$$NP: 1 + 0\sqrt{5}$$

$$aj kom.$$

$$aj Assoc$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{5}} \cdot \frac{a-b\sqrt{5}}{a-b\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a-b\sqrt{5}}{a^2-5b^2} = \left(\frac{a}{a^2-5b^2} \right) - \left(\frac{b\sqrt{5}}{a^2-5b^2} \right)$$

$a^2-5b^2 \neq 0$
→ kazdy prvok obratny ma inverz

$$a^2-5b^2=0 \Rightarrow$$

$$a^2=5b^2$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 = 5$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{5}$$

je to vedy
pravda

$$(a+b\sqrt{5})(a-b\sqrt{5}) = a^2-5b^2=0$$

$$\neq 0 \quad \neq 0$$

15.10.2021

odfotit satiatot od Hany (wymazalo sa)

$$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$$

$$-(a+b) = (-b) + (-a) = (-a) + (-b)$$

napisovanie

$$3.3.10. (R, +, \cdot), a, b \in R: a \cdot b = -2ab \text{ pole?}$$

$$a \neq 0$$

$$2) \sqrt{a \cdot a} = a$$

$$-2ac = a$$

$$c = -\frac{a}{2a}$$

$$c = -\frac{1}{2}$$

$$3) \sqrt{a \cdot a^{-1}} = e$$

$$-2a \cdot a^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$a^{-1} = -\frac{1}{2a}$$

$$a^{-1} = -\frac{1}{2a}$$

$$4) \text{ distrib. zakon: } \checkmark$$

$$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) =$$

$$-2a \cdot (b+c) = (-2ab) + (-2ac) =$$

$$(-2ab) + (-2ac) = -11-$$

! neviem zistiť príklady
môže byť veľmi
jednoduché na
príklad

$$50) \sqrt{a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}}$$

$$a \neq 0 \neq b \Rightarrow a \cdot b \neq 0$$

$$ASOC: \sqrt{a \cdot (b \cdot c)} = a \cdot (-2bc) = -2a \cdot (-2bc) = 4abc$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (-2ab) \cdot c = -2(-2ab)c = 4abc$$

TOLE: $F(., +)$

$\rightarrow (F, +)$ - komut. grupa

$\rightarrow (F \setminus \{0\}, \cdot)$ - komut. grupa

$\rightarrow$ distrib. zakon

GRUPA: $(G, \circ)$

$\circ$ - 150

asociativna

$\exists e \in G (\forall g \in G)$

$e \cdot g = g \cdot e = g$

$(\forall g \in G) (\exists g^{-1} \in G) g \cdot g^{-1} = e$

JE TO POLE

este nejaky jeden distrib.

zakon, ale nevievam ako

M-mnozina, F-pole

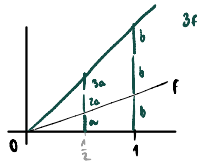
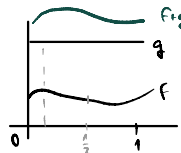
$$F: M \rightarrow F \quad (F^M, +)$$

$$f, g \in M, f, g: M \rightarrow F$$

$$f+g(m) = f(m) + g(m)$$

$$a \in F, f \in F^M \quad af(m) = a \cdot f(m)$$

$$af(m) = a \cdot f(m)$$



VEKTOROVÉ PRIESTORY:

$(V, +)$ - komut. grupa

$(F, +, \cdot)$ - pole

$\psi: F \times V \rightarrow V$

$$(\forall a, b \in F) (\forall \vec{z} \in V): 1. (a+b) \cdot \vec{z} = a \cdot \vec{z} + b \cdot \vec{z}$$

$$2. a \cdot (\vec{z} + \vec{w}) = a \cdot \vec{z} + a \cdot \vec{w}$$

$$3. (a \cdot b) \cdot \vec{z} = a \cdot (b \cdot \vec{z})$$

$$4. 1 \cdot \vec{z} = \vec{z}$$

$f: M \rightarrow F$ ($F^+, +$) - kom. grupa?

Bo ✓

1. kotiv. ? ✓

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(g+f)(x) = g(x) + f(x)$$

2. neutr. prvok: ✓

$$(f+e)(x) = f(x) = f(x) + e(x)$$

$$(\forall x \in M) \quad e(x) = 0$$

3. $(f+f^{-1})(x) = e(x) = 0$ ✓

$$f(x) + f^{-1}(x) = 0$$

$$\underline{f^{-1}(x) = -f(x)}$$

Asoc.: ? ✓

$$[(f+g)+h](x) = [f+(g+h)](x)$$

$$(f+g)(x) + h(x) = f(x) + (g+h)(x)$$

$$[f(x) + g(x)] + h(x) = f(x) + [g(x) + h(x)]$$

$$4. \quad \checkmark \quad [a \cdot (f+g)](x) =$$

$$= a[f+g](x) =$$

$$= a[f(x) + g(x)] =$$

$$= \underline{a \cdot f(x) + a \cdot g(x)}$$

$$(af+ag)(x) =$$

$$= (af)(x) + (ag)(x) =$$

$$= \underline{a \cdot f(x) + a \cdot g(x)}$$

$$\text{(samo to)}$$

musia platit všetky podmienky VP

N-tica: $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$

$a: \{1, \dots, n\} \rightarrow F$

$$a \Leftrightarrow (a(1), a(2), \dots, a(n))$$

$$b \Leftrightarrow (b(1), b(2), \dots, b(n))$$

$$a+b \Leftrightarrow (a(1)+b(1), a(2)+b(2), \dots, a(n)+b(n))$$

$$c \cdot a \Leftrightarrow (c \cdot a(1), c \cdot a(2), \dots, c \cdot a(n))$$

postupnosť: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$



da sa na to pozerať takto
 $= (a(1), a(2), a(3), \dots)$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty}: \{1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \dots)$$

$$(b_n)_{n=1}^{\infty} = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

$$(a_1+b(1), a_2+b(2), \dots)$$

4.1.8. a) Koľko prvov má VP $(\mathbb{Z}_3)^n$? 3^n

$$F^n, \text{ kde } F = (\mathbb{Z}_3, 0)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \\ \mathbb{Z}_3 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{Z}_n$ musia byť všetky len n-ica

b) Čomu sa v tomto VP rovná $\vec{2} + \vec{2} + \vec{2}$

$$\vec{2} + \vec{2} + \vec{2} = 3\vec{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \# \text{ nahodni } \vec{2}$$

$$= (0, 0) = \vec{0}$$

$$\text{pr. } f: \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_3$$

$$\vec{2} + \vec{2} + \vec{2} = 1\vec{2} + 1\vec{2} + 1\vec{2} =$$

$$= (1+1+1)\vec{2} = 0 \cdot \vec{2} = \vec{0}$$

$$\mathbb{Z}_3 \cdot \mathbb{Z}_3 \cdot \mathbb{Z}_3$$

moduluje
 tromi

$S \subseteq V, S \neq \emptyset$
 VPP, at:
 1. $\vec{2}, \vec{3} \in S \Rightarrow \vec{2} + \vec{3} \in S$
 2. $(\forall a \in F)(\forall \vec{2} \in S) \quad a\vec{2} \in S$
 $a \in F, \vec{2} \in S \Rightarrow a\vec{2} \in S$

4.2.3.

a) nie je VPP, lebo
 neplatí ①

$$c) \quad \vec{x}_1 = 0 \vee \vec{x}_2 = 0$$



$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \neq +$$

20. 10. 2021

- 2. Někdy → písanka
(po sítu v poudelov)



4.2.3 Je to podprostor $\mathbb{R}^3$?

d) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 + 4x_2 = 0 \}$

→ nie je VPP (nie ľahko negatívny nulový vektor)

e) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \}$

$\vec{0} \in M : 0 - 0 = 0 \checkmark$

→ nie je pravdivý $\checkmark$

$\vec{0} \in M$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in M : a_1 - a_2 = 0$

$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M : b_1 - b_2 = 0$

2. $\vec{a} + \vec{b} \in M$

$(a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3) \in M$

$a_1 + b_1 - (a_2 + b_2) \stackrel{?}{=} 0$

$a_1 + b_1 - a_2 - b_2 \stackrel{?}{=} 0$

$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) =$

$-0 + 0 =$

$= 0$

3.

$c \in F, \vec{a} \in M \Rightarrow c\vec{a} \in S$

$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3)$

$a_1 - (ca_2) \stackrel{?}{=} 0$

$a_1 - ca_2 \stackrel{?}{=} 0$

$c(a_1 - a_2) \stackrel{?}{=} 0$

$c \cdot 0 = 0$

f) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$

→ niečo sme si uvedomili & predosleho príkladu

i) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 = -x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 = 0, 2x_1 - x_3 = 0 \}$

(maj to samé ľahko preveriť)

$2x_1 + x_2 = 0$

$2x_1 - x_3 = 0$

a práve

prienik dvoch podprostorov je podprostor

$\{ (x_1, x_2, x_3) : 2x_1 + x_2 = 0 \} \cap \{ (x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - x_3 = 0 \}$

VPP VPP

VPP

niečo čo nechápem na

čo mi je: FERMATOVA VETA

$a^p \equiv a \pmod p$ (určité číslo =)

$M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \}$

$\begin{array}{r} 1 \ 2 \\ 0 \ 0 \\ 1 \ 1 \\ \hline 2 \ 2 \end{array}$

$\updownarrow$

$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$

v poli $\mathbb{R}_3$ platí:
($\forall x \in \mathbb{R}_3$) $x^2 = x$

g) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| = |x_2| \}$

→ nie je podprostor

→ napríklad $\vec{a} \in S, \vec{b} \in S \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \notin S$

$(1, 1, ?)$

$(1, -1, ?)$

$(2, 0, ?)$

$|x_1| \neq |x_2|$

W) $M = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$
 $(1, 1, 1) \rightarrow$ ale $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $\hookrightarrow (-1, 1, 1) \in M$
 $4 \cdot 0 = 0$

4.2.4. VPP $\mathbb{R}^n$?

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad 2f(0) - f(1) \rightarrow 2f(0) - f(1) = 0$

funkcie, kt. sa konštantou
 rovná 0 je $\vec{0}$

1) $\vec{0}$

2) f_0

$2f(0) - f(1) = 0$

$2g(0) - g(1) = 0$

$(0) = f(0) + g(0)$

$(f+g) \stackrel{!}{=} 0$

$2(f+g)(0) - (f+g)(1) =$

$= 2(f(0) + g(0)) - (f(1) + g(1)) =$

$= 2f(0) + 2g(0) - f(1) - g(1) =$

$= (2f(0) - f(1)) + (2g(0) - g(1)) =$

$= 0 + 0 = \underline{0}$

3) $f \quad 2f(0) - f(1) = 0$

$cf = 0$

$2[cf(0)] - (cf)(1) =$

$= 2cf(0) - cf(1) =$

$= c(2f(0) - f(1)) =$

$= c \cdot 0 = \underline{0}$

e) charakterizácia funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R}) |f(x)| < a \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}) |f(x) + g(x)| < a + b$
 $(\forall x \in \mathbb{R}) |g(x)| < b$
 $cf(x)$
 $|cf(x)| < |c| \cdot a$

lineárna (nezávislosť)
 LZ, LN vektorov

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ sú $LZ \Leftrightarrow \exists a_1, \dots, a_n$

také, že $a_1 \vec{a}_1 + \dots + a_n \vec{a}_n = \vec{0}$ a $(\exists) a_i \neq 0$.

Nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V, \vec{a} + \vec{0}$. Potom $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ sú $LZ \Leftrightarrow (\exists i \geq 2)$

$\vec{a}_i$ je lin. komb. predchádzajúcich, t.j.

$(\exists a_1, \dots, a_{i-1} \in \mathbb{R}) \vec{a}_i = a_1 \vec{a}_1 + \dots + a_{i-1} \vec{a}_{i-1}$

4.3.5 $(1, 3, 4), (2, 1, 3), (3, 1, 4) \in \mathbb{K}_5^3$

? $(\exists a \in \mathbb{K}_5)$?

? $(\exists a, b \in \mathbb{K}_5)$?

ale toto nevyjde
 $(2, 1, 3) = a(1, 3, 4) \rightarrow 2(1, 3, 4) = (2, 1, 3)$
 $(3, 1, 4) = a(1, 3, 4) + b(2, 1, 3)$

$x_1(1, 3, 4) + x_2(2, 1, 3) + x_3(3, 1, 4) \stackrel{\text{idem}}{=} (0, 0, 0)$
 $(x_1, 3x_1 + 2x_2 + 3x_3; 4x_1 + x_2 + x_3; 4x_1 + 3x_2 + 4x_3) = (0, 0, 0)$
 $\parallel ? \quad \parallel ? \quad \parallel ?$
 $0 \quad 0 \quad 0$

$(1, 3, 4), (2, 1, 3), (3, 1, 4) \in \mathbb{K}_5^3$

? $(\exists a \in \mathbb{K}_5)$? $2(1, 3, 4) = (2, 6, 4)$

? $(\exists a, b \in \mathbb{K}_5)$? $(3, 1, 4) = a(1, 3, 4) + b(2, 1, 3)$

$2 + x = 0 \quad (-?)$
 $a + 2b = 3$
 $3a + b = 1$
 $4a + 3b = 4$
 $4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 4$
 $2 + 2 = 4$
 $4 = 4$
 $a = 3, 5b$
 $3(5b) + b = 1$
 $2 \cdot 0 + b = 1$
 $2 + 2b = 1$
 $2b = 1 + 5 \cdot 6$
 $b = 3$
 $a = 3 + 5 \cdot 3 = 3 + 15 = 18$
 $18 \equiv 3 \pmod{5}$
 $a = 3, b = 3$
 $3(1, 3, 4) + 3(2, 1, 3) = (9, 9, 12) + (6, 3, 9) = (15, 12, 21) \equiv (0, 0, 0) \pmod{5}$

treba je lineárna
 kombinácia tých dvoch

Steinitzova veta

Nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s \in V$ sú LN.

Nech $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ sú také, že

$[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = V$. Potom $s \leq n$ a ...

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$
 $(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$
 sú LN

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$
 $(1, 0, 0) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)$
 $\vec{a}_4 \quad \vec{a}_5 \quad \vec{a}_6$
 $(1, 2, 3) \quad (1, 3, 2) \quad (2, 1, 5)$
 $(1, 2, 3, 2) \quad (1, 2, 3, 2)$
 $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \mathbb{R}^3$
 sú LN
 Steinitz
 $4 \leq 3 \times$

keď máme

6 dispozícií Steinitzov
 tak nemáme s
 počtom

v Steinitz. vete
 nie je napísané
 slovo "alebo"!